PART4　座標空間における図形

例題

中心の座標が $(1,\ 0,\ -3)$ で，点 $(3,\ 3,\ -1)$ を通る球面を S とする。

(1)　S の方程式を求めよ。

(2)　S と xy 平面の交わりは円である。この円の中心と半径を求めよ。

(3)　S と平面 $z=k$ の交わりが半径 1 の円になるとき，k の値を求めよ。

Point Pickup

練習

2 点 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 4)$, $\mathrm{B}(-5,\ 8,\ -2)$ を直径の両端とする球面を S とする。

(1)　S の方程式を求めよ。

(2)　S と yz 平面の交わりは円である。この円の中心と半径を求めよ。

(3)　S と平面 $y=k$ の交わりが半径 4 の円になるとき，k の値を求めよ。

第16講　PART4 確認問題

2 点 A(0, 1, −1), B(2, −5, 7) を直径の両端とする球面を S とする。

1 S の方程式は，

$$\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)^2+\left(y+\boxed{\text{イ}}\right)^2+\left(z-\boxed{\text{ウ}}\right)^2=\boxed{\text{エオ}}$$

である。

2 S と xy 平面の交わりは円である。

この円の中心の座標は $\left(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キク}},\ \boxed{\text{ケ}}\right)$ であり，

半径は $\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

3 S と平面 $z=k$ の交わりが半径 1 の円になるとき，

$k=\boxed{\text{シス}},\ \boxed{\text{セ}}$ である。

PART4　座標空間における図形

例題

中心の座標が $(1,\ 0,\ -3)$ で，点 $(3,\ 3,\ -1)$ を通る球面を S とする。

(1)　S の方程式を求めよ。

(2)　S と xy 平面の交わりは円である。この円の中心と半径を求めよ。

(3)　S と平面 $z=k$ の交わりが半径1の円になるとき，k の値を求めよ。

(1)　球面 S の半径を r とすると

$$r=\sqrt{(3-1)^2+(3-0)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{17}$$

よって，球面 S の方程式は　$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=17$

(2)　球面 S が xy 平面，すなわち平面 $z=0$ と交わってできる円の方程式は

$$(x-1)^2+y^2+(0+3)^2=17,\ \ z=0$$

つまり　$(x-1)^2+y^2=8,\ \ z=0$

よって，求める円の中心は点 $(1,\ 0,\ 0)$，半径は　$2\sqrt{2}$

(3)　球面 S が平面 $z=k$ と交わってできる円の方程式は

$$(x-1)^2+y^2+(k+3)^2=17,\ \ z=k$$

つまり　$(x-1)^2+y^2=17-(k+3)^2,\ \ z=k$

半径の条件より　$17-(k+3)^2=1^2$　　$(k+3)^2=16$　　$k+3=\pm4$

よって　$k=-7,\ 1$

練習

2 点 A$(1,\ 2,\ 4)$，B$(-5,\ 8,\ -2)$ を直径の両端とする球面を S とする。

(1)　S の方程式を求めよ。

(2)　S と yz 平面の交わりは円である。この円の中心と半径を求めよ。

(3)　S と平面 $y=k$ の交わりが半径 4 の円になるとき，k の値を求めよ。

(1)　球面 S の中心は，線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{1-5}{2},\ \frac{2+8}{2},\ \frac{4-2}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad (-2,\ 5,\ 1)$$

半径は　$\sqrt{(-2-1)^2+(5-2)^2+(1-4)^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

よって，球面 S の方程式は　$(x+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27$

(2)　球面 S が yz 平面，すなわち平面 $x=0$ と交わってできる円の方程式は

$$(0+2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27,\ \ x=0$$

つまり　$(y-5)^2+(z-1)^2=23,\ \ x=0$

よって，求める円の中心は点 $(0,\ 5,\ 1)$，半径は　$\sqrt{23}$

(3)　球面 S が平面 $y=k$ と交わってできる円の方程式は

$$(x+2)^2+(k-5)^2+(z-1)^2=27,\ \ y=k$$

つまり　$(x+2)^2+(z-1)^2=27-(k-5)^2,\ \ y=k$

半径の条件より　$27-(k-5)^2=4^2$　　$(k-5)^2=11$　　$k-5=\pm\sqrt{11}$

よって　$k=5\pm\sqrt{11}$

第16講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：3，エオ：26

[解説]

球面 S の中心は，線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{1-5}{2},\ \frac{-1+7}{2}\right)$$

すなわち　$(1,\ -2,\ 3)$

半径は

$$\sqrt{(0-1)^2+(1+2)^2+(-1-3)^2}$$
$$=\sqrt{1+9+16}$$
$$=\sqrt{26}$$

よって，球面 S の方程式は

$$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=26}$$ [A]

[A]　中心が 点 $(a,\ b,\ c)$，半径が r の球面の方程式は，
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

2

[正解] カ：1，キク：−2，ケ：0，コサ：17

[解説]

球面 S が xy 平面，すなわち $z=0$ と交わってできる円の方程式は

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(-3)^2=26$$
$$z=0$$ [B][C]

すなわち　$(x-1)^2+(y+2)^2=17$，$z=0$

よって，中心 $\boldsymbol{(1,\ -2,\ 0)}$，半径 $\boldsymbol{\sqrt{17}}$ の円を表す。

[B]　点 $(a,\ b,\ c)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は
$z=c$

[C]　xy 平面の方程式は，$z=0$。

3 **[正解]** シス：-2，セ：8

[解説]

球面 S が平面 $z=k$ と交わってできる円の方程式は

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(k-3)^2=26,$$

$$z=k$$ [D]

すなわち

$$(x-1)^2+(y+2)^2=26-(k-3)^2, \quad z=k$$

これは，中心 $(1,\ -2,\ k)$，半径 $\sqrt{26-(k-3)^2}$ の円を表す。

半径の条件より，

$$26-(k-3)^2=1^2$$

$$(k-3)^2=25$$

$$k-3=\pm 5$$

よって，$\boldsymbol{k=-2,\ 8}$

[D]　$z=k$ は，xy 平面に平行な平面の方程式